Ein merkwürdiges Resultat über Runs bei Münzwürfen[1]

A. S. GABHE, K. S. BHANU, M. N. DESHPANDE, INDIEN

[1] Das Original erschien in Teaching Statistics (Volume 34, Number 2, Summer 2012; S. 79–80). Originaltitel: A result concerning runs when tossing a fair coin
Übersetzung, Bearbeitung und Kürzung: J. MEYER

Zusammenfassung: *Es geht um einen überraschenden Zusammenhang bei Münzwürfen: Die Anzahl der Runs und und die Länge des ersten Runs hängen miteinander zusammen.*

1 Einleitung

Wir betrachten Münzwürfe (mit einer fairen Münze). Es wird n-mal geworfen. Unter einem *Run* versteht man eine Abfolge von gleichen Ergebnissen. Die Zufallsvariable N bezeichne die Anzahl der Runs, und die Zufallsvariable L bezeichne die Länge des ersten Runs. Benennt man die beiden möglichen Wurfergebnisse mit H und T und hat man die Folge HHTHHTT beobachtet, so ist $N = 4$ und $L = 2$.

Zwischen N und L gibt es einen Zusammenhang. Man wird erwarten, dass (für festes n) die eine Zufallsvariable groß ist, wenn die andere klein ist. Diese Erwartung wird in diesem Aufsatz präzisiert.

Man betrachte den Fall $n = 3$. Es gibt 8 mögliche gleichwahrscheinliche Sequenzen:

Sequenz	N	L	$L \cdot N$
HHH	1	3	3
HHT	2	2	4
HTH	3	1	3
HTT	2	1	2
TTH	2	2	4
TTT	1	3	3
THH	2	1	2
THT	3	1	3

Der Erwartungswert $E\,(L \cdot N)$ beträgt 3. Generell ist $E\,(L \cdot N) = n$, wie nun bewiesen werden soll.

2 Beweise des generellen Resultats

Zunächst mache man sich klar, dass die Beziehung

$$P(L=i)=\begin{cases} 1/2^i & \text{für} \quad 1 \le i \le n-1 \\ 1/2^{n-1} & \text{für} \quad i=n \end{cases} \tag{1}$$

gilt. Ferner brauchen wir die Beziehung

$$E(N)=\frac{n+1}{2}. \tag{2}$$

Um sich von (2) zu überzeugen, beachte man, dass mit dem ersten Münzwurf ein Run startet und dass für alle folgenden Münzwürfe ein neuer Run startet, der mit Wahrscheinlichkeit 1/2 vom vorherigen Münzwurf verschieden ist. Mit den (unabhängigen) Indikatorvariablen

$$I_i=\begin{cases} 0 & \text{falls Münzwurf Nr. } i = \text{Münzwurf Nr. } i-1 \\ 1 & \text{falls Münzwurf Nr. } i \neq \text{Münzwurf Nr. } i-1 \end{cases}$$

gilt daher $N = 1 + \sum_{i=2}^{n} I_i$.

Wegen $E(I_i) = \frac{1}{2}$ ist $E(N) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Nun wird das Gesetz der totalen Erwartung (vgl. etwa Rice (2006)) angewendet; damit ist

$$E(L \cdot N) = \sum_{i=1}^{n} E(LN \mid L=i) \cdot P(L=i).$$

Beachtet man, dass aus $L = N$ die Gleichung $N = 1$ folgt und aus $L = n - 1$ die Gleichung $N = 2$, so folgt mit (1) die Beziehung

$$E(L \cdot N) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{E(L \cdot N \mid L=i)}{2^i} + \frac{2\cdot(n-1)+n}{2^{n-1}}. \tag{3}$$

Nun muss noch der Fall $L = i$ mit $i \le n - 2$ untersucht werden.

Das Resultat von n Würfen hat dann eine der zwei Formen

$$\underbrace{\text{HHH...H}}_{i-\text{mal}}\ \text{T}\ \underbrace{\text{X...X}}_{\substack{n-i-1\\ \text{weitere}\\ \text{Elemente}}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\text{TTT...T}}_{i-\text{mal}}\ \text{H}\ \underbrace{\text{X...X}}_{\substack{n-i-1\\ \text{weitere}\\ \text{Elemente}}},$$

wobei die X-Elemente entweder H oder T sein können. Aufgrund von (2) ist bei den letzten $n - i - 1$ Elementen die Anzahl der zu erwartenden Runs durch $\frac{n-i}{2}$ gegeben. Nun gibt es zwei Fälle:

1. Stimmt das (i+1)-te Element mit dem (i+2)-ten überein, so ist für die gesamte Sequenz die Anzahl der zu erwartenden Runs durch $\frac{n-i}{2}+1$ gegeben.
2. Stimmt das (i+1)-te Element nicht mit dem (i+2)-ten überein, so ist für die gesamte Sequenz die Anzahl der zu erwartenden Runs durch $\frac{n-i}{2}+2$ gegeben.

Damit gilt

$$\begin{aligned} E\left(L \cdot N \middle| L=i\right) &= i \cdot E\left(N \middle| L=i\right) \\ &= \frac{i}{2} \cdot \left(\left(\frac{n-i}{2}+1\right)+\left(\frac{n-i}{2}+2\right)\right) \\ &= \frac{i}{2} \cdot \left(n-i+3\right) \end{aligned}$$

und aus (3) wird folglich

$$E\left(L \cdot N\right) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{i \cdot \left(n-i+3\right)}{2^{i+1}} + \frac{2 \cdot \left(n-1\right)+n}{2^{n-1}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich vereinfachen, wenn man die Formeln

$$\sum_{i=1}^{n-2} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n}{2^{n-2}} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n-2} \frac{i^2}{2^i} = 6 - \frac{2 \cdot n^2 + 4}{2^{n-1}}$$

verwendet (man bekommt sie etwa durch formale Differentiation der Summenformel der geometrischen Reihe).

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} E\left(L \cdot N\right) &= \frac{n+3}{2} \cdot \left(2 - \frac{n}{2^{n-2}}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(6 - \frac{2 \cdot n^2 + 4}{2^{n-1}}\right) \\ &\quad + \frac{3 \cdot n - 2}{2^{n-1}} \\ &= n. \end{aligned}$$

3 Wie geht es weiter?

Gilt das Resultat $E(L \cdot N) = n$ auch für eine gezinkte Münze? Stellt man für $n = 3$ ein Analogon zur obigen Tabelle auf, so ergibt sich wiederum $E(L \cdot N) = 3$. Allerdings hat man schon für $n = 4$ ein abweichendes Ergebnis.

Literatur

Rice, J. (2006): Mathematical Statistics and Data Analysis (3rd edition). Belmont, CA: Duxbury Press.

Anschrift der Verfasser

A. S. Gabhe
K. V. Pendharkar College, Mumbai, Indien
gabhearuna@gmail.com

K. S. Bhanu
Institute of Science, Nagpur, Indien
bhanu_105@yahoo.com

M. N. Deshpande
Nagpur, Indien